

$$PSL_2(\mathbb{C}) \cong SO_3(\mathbb{C})$$

Recherches: 106, 214, 215, 170, 101, 191

Théorème: $PSL_2(\mathbb{C}) \cong SO_3(\mathbb{C})$.

Preuve:

On considère $M_2(\mathbb{C})$ l'espace tangent en l'identité à $SL_2(\mathbb{C})$.

On a: $M_2(\mathbb{C}) = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}(M) = 0 \}$

On fait agir $SL_2(\mathbb{C})$ sur $M_2(\mathbb{C})$ par conjugaison:

$$\begin{aligned} \Psi: SL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Aut}(M_2(\mathbb{C})) \\ A &\mapsto \Psi_A: X \mapsto AXA^{-1} \end{aligned}$$

Cela définit bien une action et $\text{Tr}(AXA^{-1}) = \text{Tr}(X) = 0$

De plus, $\dim(M_2(\mathbb{C})) = 2$ comme moyen de la Trace.

Puisque pour tout A , Ψ_A est linéaire bijective, $\Psi(SL_2(\mathbb{C}))$ est contenu dans le groupe linéaire de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ que l'on identifie à $GL_3(\mathbb{C})$.

Plus précisément, puisque $\det(\Psi_A(X)) = \det(AXA^{-1}) = \det(X)$, on

a: $\Psi(SL_2(\mathbb{C})) \subset O(\det)$ avec $O(\det)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique $\det$ (qui en est bien une car on est en dimension 2).

Mg $\det$ est non dégénérée:

Soit $X \in M_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

$$\text{On a } \det(X) = -a^2 - bc = \underbrace{-a^2}_{\substack{\text{réductible de} \\ \text{Cauh}}} - \frac{1}{2} \underbrace{(b+c)^2}_{e_2} + \frac{1}{2} \underbrace{(b-c)^2}_{e_3}$$

Les formes linéaires e_1, e_2 et e_3 sont linéairement indépendantes, donc $\det$ est non dégénérée et de rang 3.

Enfin alors, dans une base $\det$ -orthogonale de $M_2(\mathbb{C})$, le groupe $O(\det)$ s'identifie à $O_3(\mathbb{C})$.

Il suit que $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \subset O_3(\mathbb{C})$.

Mg $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \subset SO_3(\mathbb{C})$.

φ étant continue et $SL_2(\mathbb{C})$ étant connexe,
 $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est connexe dans $O_3(\mathbb{C})$.

D'autre part $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ contient I_3 . ($\varphi(I_2) = I_3$)

Finalement $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \subset SO_3(\mathbb{C})$ (car c'est la composante connexe de I_3 dans $O_3(\mathbb{C})$)

Mg φ est surjectif :

1) épand, différencions φ en I_2 :

Soit $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\|H\| \ll 1$. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \varphi(I_2 + H)(X) &= \varphi_{I_2+H}(X) = (I_2 + H)X(I_2 + H)^{-1} \\ &= (I_2 + H)X \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k \\ &= X + HX - XH - \underbrace{HXH + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k H^k}_{= o(\|H\|)} \end{aligned}$$

D'où $d\varphi_{I_2} : H \mapsto (X \mapsto HX - XH)$

Finalement, φ est différentiable en l'identité de la n -variété $SL_2(\mathbb{C})$ dans la sous-variété $SO_3(\mathbb{C})$.

Donc φ induit $d\varphi_{I_2} : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_{\varphi(I_2)}SO_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$

où $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ est l'espace tangent à l'identité dans $SO_3(\mathbb{C})$.

D'autre part, $\text{Ker } d\varphi_{I_2} = \{H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / HX = XH \ \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$
 $= \{H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / \text{Tr}(H) = 0 \text{ et } H = -I_2\}$
 $= \{0\}$.

Donc $d\varphi_{I_2}$ est injective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de $\dim = 3$ dans $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ de dimension $\frac{3(3-1)}{2} = 3$. Donc $d\varphi_{I_2}$ est un isomorphisme.

D'après le thm d'inversion locale, φ est un homéomorphisme local

et $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ contient un ouvert et par translation, $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$

est un ouvert, donc aussi un fermé du groupe topologique $SO_3(\mathbb{C})$.

$\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est donc un ouvert-fermé non vide de $SO_3(\mathbb{C})$ connexe, i.e. : $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) = SO_3(\mathbb{C})$.

Conclusion : Puisque $\text{Ker } \varphi = K^*I_2 = Z(SL_2(\mathbb{C}))$, $PSL_2(\mathbb{C}) \cong SO_3(\mathbb{C})$.

Soit G un groupe topologique. $H \in G$ ouvert.
 $G = H \cup \bigcup_{g \in H} gH$
 $gH \rightarrow gh$ est un homéomorphisme
 donc $H = G \setminus \{0\}$ avec
 ouvert donc H fermé.